Universidad Nacional de Ingeniería **24-06-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

SOLUCIONARIO DE LA TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
CALCULO NUMERICO (PARTE A) (30 minutos)

APELLIDOS Y NOMBRE	SECCION	NOTA

Marque la alternativa que considere correcta:

1. Dada la siguiente tabla

x	8.1	8.3	8.6	8.7
x*ln(x)	16.94410	17.56492	18.50515	18.82091

¿Cual es el valor del error limitante al usar el polinomio de grado 1 para aproximar f(x)=x*ln(x), en x=8.4?

a) 0.00118 b)0.0013 c) 0.0005 $\boxed{\text{d) 0.00120}}$ e) N.A

2. Sean los datos:

x	0	1	2
y	a	b	c

Al usar el polinomio de Lagrange, ¿cuál será el polinomio $L_1(x)$ en comandos de Matlab.

a) L=poly([2 0])/polyval(poly([0 2],1))
b) L=poly([2 0])/poly([0 2],1)
c) L=polyval([0 2],1)/poly([0 1 2],1)
d) $\boxed{\text{L=poly ([0 2])/polyval(poly([0 2]),1)}}$
e) N.A.

3. Sean los siguientes puntos: (0,-1); (1,1); (2,9) y (3,29); por el cual se puede construir un polinomio interpolante de la forma:
$p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-3) + d(x-1)(x-3)(x-2)$,
entonces $a+b+c+d$ será:

a) 7 b) 5 $\boxed{\text{c) 22}}$ d) 18 e) N.A.

4. Con los datos de la pregunta anterior, estime $y'(x=1.5)$, para ello utilice un polinomio que interpole a los 4 puntos:

a) 5.75 b) 6.75 $\boxed{\text{c) 7.75}}$ d) 8.75 e) N.A.

5. Sea $g(x) = c_o + c_1 \ln(x)$.
Se desea encontrar los coeficientes c_0 y c_1 de la regresión, se sabe que f(x) pasa por los puntos (1,1),(2,2),(3,3). Use las instrucciones de Matlab para hallar los coeficientes c.

```
X=1:3; Y=1:3;
M=[X’.^0 log(X’)]
C=(M’*M)\ (M’*Y’)
```

6. Sea la siguiente tabla:

X	Y
0	0.5000
0.5000	-0.7500
1.0000	-1.5000
1.5000	-1.7500
2.0000	-1.5000
2.5000	-0.7500
3.0000	0.5000
3.5000	2.2500
4.0000	4.5000

Realice un ajuste cuadrático por mínimos cuadrados:

Y= ---------**1**--------- X^2 + ---------**-3**--------- X + ---------**0.5**---------

R^2 = ---------**1.00**---------

7. Por comodidad una función Spline se escribe de la siguiente manera:

$$S(x) = a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + c(x-x_0) + d$$

Elabore una función para escribir *S(x)* en la forma estándar como serie de potencias $p(x) = p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4$, donde los coeficientes serán guardados en un vector *p*:

function p=convierte(a, b, c, d, x0)

---

p=a*poly([x0 x0 x0]) + [0 b*poly([x0 x0])) + c*[0 0 1 –x0] + [0 0 0 d];

---

8. Determinar si la siguiente función es un Spline cúbico en el intervalo [0,2]

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \in [0,1] \\ 2(\mathrm{x}-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Justificar correctamente.

....

Si es un spline cúbico, porque cumple con todas las condiciones de suavidad: continuidad, diferenciabilidad y doble diferenciabilidad en el nodo comun x=1.

....

9. Implementar una función en MatLab que dado $(\mathrm{x}_0, x_1, \mathrm{K}\ x_k)$ y $(\mathrm{f}[\mathrm{x}_0], f[x_1], \mathrm{K}\ f[x_k])$ devuelva $(\mathrm{f}[\mathrm{x}_0, x_1, x_2], f[x_1, x_2, x_3], \mathrm{K}\ f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k])$ que tenga la siguiente cabecera: **function [delta2]=difdiv2(x,y)**

Solución:

```
function [delta2]=difdiv2(x,y)
k=length(x);
delta1=[];
for i=1:k-1
   delta1=[delta1,(y(i+1)-y(i))/(x(i+1)-x(i))]
end
```

```
delta2=[];
for i=1:length(delta1)-1
   delta2=[delta2,(delta1(i+1)-delta1(i))/(x(i+2)-x(i))]
end
```

10. Probar que f[x_0, x_1, x_2, x_3] = $\Delta^3 f(x_o)$ / ($3!\,h^3$)

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

$$=\frac{\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}-\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}{3h}$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{2h}-\dfrac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{2h}}{3h}$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{\Delta f_2}{h}-\dfrac{\Delta f_1}{h}}{2h}-\dfrac{\dfrac{\Delta f_1}{h}-\dfrac{\Delta f_0}{h}}{2h}}{3h}=\frac{\Delta^2 f_1-\Delta^2 f_0}{6h^3}=\frac{\Delta^3 f_0}{3!\,h^3}$$

Los Profesores

Universidad Nacional de Ingeniería **24-06-06**
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-1**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

TERCERA PRÁCTICA CALIFICADA
CALCULO NUMERICO (PARTE B)
(80 minutos)

Problema 1

Dada la función $f(x) = \ln(x)$

a) Hallar el polinomio interpolante *P*(x) que pase por los puntos

$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = 2$

e interpolar en x =1.5

b) Calcule una cota superior del error de interpolación $|f(x) - P(x)|$

c) ¿Cuál es la relación que existe entre el polinomio interpolante formado por los 3 primeros puntos y el polinomio obtenido en a) ?

Solución

a) Usaremos la expresión de Newton:

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$

$$f[x_0, x_1] = f[1, 4/3] = 0.8630$$

$$f[x_1, x_2] = f[4/3, 5/3] = 0.6694$$

$$f[x_2, x_3] = f[5/3, 2] = 0.5470$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[1, 4/3, 5/3] = -0.2904$$

$$f[4/3, 5/3, 2] = -0.1836$$

$$f[1, 4/3, 5/3, 2] = 0.1068$$

Con lo que obtenemos:

$$P(x) = 0.8630(x-1) - 0.2904(x-1)(x-4/3) + 0.1068(x-1)(x-4/3)(x-5/3)$$

P(1.5)= 0.4058

b) .

$$E = |\ln(3/2) - P(3/2)| = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\prod_{j=0}^{3}(3/2 - x_0) \quad \xi \in <1,2>$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$E = (3/2-1)(3/2-4/3)(3/2-5/3)(3/2-2) \times \frac{-6}{\xi^4 \times 24}$$

$$|E| = \frac{0.0017361}{\xi^4} \qquad \xi \in <1,2>$$

$$\Rightarrow |E| < 0.0017361$$

c)

$$p(x) = p_2(x) + [x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)$$
$$= p_2(x) + f[1, 4/3, 5/3, 2](x-1)(x-4/3)(x-5/3)$$

Problema 2

Obtener una interpolación por Spline Natural para el polinomio $p(x) = x^4$, para x=0, 1, 2 y 3.

a) Muestre las funciones Spline *S(x)* para cada intervalo.
b) Dime el máximo error cometido, para ello tabule $|p(x) - S(x)|$ con $\Delta x = 1/4$.
c) Comente sus resultados.

Solución

a)

i	**hi**	**x**	**F(x)**	**f[,]**
0	1	0	0	1
1	1	1	1	15
2	1	2	16	65
		3	81	

En este caso:

$$\begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} f[x_1 x_2] - f[x_0 x_1] \\ f[x_2 x_3] - f[x_1 x_2] \end{bmatrix}$$

Reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 15-1 \\ 65-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = 2.4 \quad M_2 = 74.4 \quad M_0 = M_3 = 0$$

$$S(x) = \begin{cases} x \in [0,\ 1] & 0.4(x-0)^3 + 0(x-0)^2 + 0.6(x-0) + 0 \\ x \in [1,\ 2] & 12(x-1)^3 + 1.2(x-1)^2 + 1.8(x-1) + 1 \\ x \in [2,\ 3] & 12.4(x-2)^3 + 37.2(x-2)^2 + 40.2(x-2) + 16 \end{cases}$$

b) Tabulando:

x	P(x)	S(x)	Error=P(x)-S(x)|
0	0	0	0
0.25	0.0039	0.1562	0.1523
0.5	0.0625	0.35	0.2875
0.75	0.3164	0.6187	0.3023
1	1	1	0
1.25	2.4414	1.7125	0.7289
1.50	5.0625	3.7	1.3625
1.75	9.3789	8.0875	1.2914
2	16	16	0
2.25	25.6289	28.1812	2.5523
2.5	39.0625	43.85	**4.7875**
2.75	57.1914	61.8438	4.6523
3	81	81	0

Se observa que el maximo error es 4.7875.

c) El mayor error se registra en el tercer intervalo.

Problema 3
Dados los siguientes datos:

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Y	2.0	2.04	2.25	2.33	2.56	2.83

Se sabe que g(x) $\approx a\sqrt{1+bx^2}$
Se pide:

a) Encuentre la función regresora g(x), para aplicar el problema de mínimos cuadrados.

b) Encuentre la ecuación normal $A^tAc=A^ty$ donde *c* son los coeficientes de g(x).

c) ¿Calcule los coeficientes *a* y *b*?

d) ¿Calcule el factor de regresión?.¿Que tan bueno es el ajuste?

Solución

a)
$$y = a\sqrt{1+bx^2}$$
$$y^2 = a^2 + a^2bx^2$$

Cambio de variable: $Y = y^2 \quad X = x^2 \quad A = a^2 \quad B = a^2b$

$$Y = A + BX$$

b) Ecuacion Normal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0^2 \\ 1 & 0.2^2 \\ 1 & 0.4^2 \\ 1 & 0.6^2 \\ 1 & 0.8^2 \\ 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 \\ 2.04^2 \\ 2.25^2 \\ 2.33^2 \\ 2.56^2 \\ 2.83^2 \end{bmatrix}$$

$$M.p = Y$$
$$M^T.M.p = M^T.Y$$
$$\begin{bmatrix} 1.5664 & 2.2 \\ 2.2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.1341 \\ 33.2155 \end{bmatrix}$$
$$A = 3.8896$$
$$B = 4.1097$$

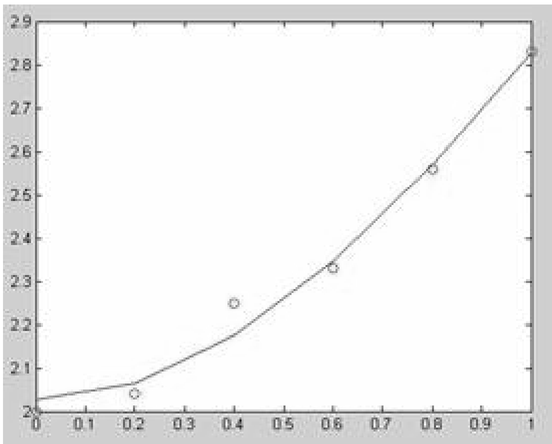
c)

$$a = \sqrt{A} = 2.0272$$
$$b = \frac{B}{a^2} = 0.9464$$
$$g(x) = 2.0272\sqrt{1+0.9464x^2}$$

d)

$R^2 = 0.9781$

Es un buen ajuste.



Los Profesores